

HDD ベンチマーク問題における位相安定化補償器及び ゲイン安定化補償器の GKYP 設計法

学生員 兼松 正人^{*a)} 上級会員 藤本 博志^{*}

Generalized KYP Synthesis on the Phase Stabilization and Gain Stabilization Compensators for the HDD Benchmark Problem

Masato Kanematsu^{*a)}, Student Member, Hiroshi Fujimoto^{*}, Senior Member

Feedback controllers are used to suppress disturbances and modelling error. In particular, position control error depends on feedback control performance. Therefore, extensive research has been devoted to the development of feedback control design. However, mechanical systems have many resonant modes, which disturb system stability and limit feedback control performance. Generally, notch filters are used to suppress resonant modes at the expense of phase delay, which also restricts bandwidth. In this paper, a method for the simultaneous design of a feedback controller and phase stabilization and gain stabilization compensators using the generalized KYP lemma is proposed. The generalized KYP lemma enables feedback control performance to be optimized while considering system stability. First, the structures of the feedback controllers and stabilization compensators are defined. Various control performances are formulated using frequency domain inequalities. Using the generalized KYP lemma, the feedback controller is optimized while considering various types of control performance. The effectiveness of the proposed design method is verified in application examples on the HDD benchmark problem.

キーワード : HDD ベンチマーク問題、GKYP 補題、ゲイン安定化補償器、位相安定化補償器

Keywords: HDD Benchmark Problem, Generalized KYP Lemma, Gain Stabilization Compensator, Phase Stabilization Compensator

1. 序 論

ハードディスク装置 (Hard Disk Drive : HDD) や半導体露光装置などの精密位置決め機器の高性能化への要求は高く、様々な研究を通して高速・高精度化が行われている。高精度な位置決めを実現するためには外乱を補償するためのフィードバック制御器の広帯域化が必要となり、精力的な研究が進められている⁽¹⁾⁽²⁾⁽³⁾。

精密位置決め用のフィードバック制御器に求められる性能は、機構系が持つ共振モードの安定化及び制御帯域の広帯域化である。HDD の精密位置決めでは、モード影響定数が負である共振モードはむだ時間や離散化時の遅れによりナイキスト線図上にて点 $[-1, 0j]$ から遠ざかる方向に円を描くため、位相安定化しやすい。一方、モード影響定数が正

である共振モードはナイキスト線図上にて点 $[-1, 0j]$ に向かって円を描くため位相安定化が難しい。そのため従来手法ではモード影響定数が正である共振モードを予めノッチフィルタによりゲイン安定化し、剛体モードを含むその他の共振モードに対して、位相安定化補償器が別々に設計されていた⁽⁴⁾。しかしながら剛体モードを位相安定化するために位相進み補償を行うと、高周波域でのゲインを増大させるためモード影響定数が負である共振モードが不安定になりやすく、モード影響定数が正の共振モードを位相安定化するために位相遅れ補償を行うと、制御帯域での位相遅れが増大し、広帯域化を阻害する。このように HDD の精密位置決めでは、位相進み補償特性及びノッチフィルタ特性を各周波数領域に作用させることで広帯域化が可能な制御対象であるが、各共振モードに対する安定化補償器は互いに影響しあっているため、同時最適化を行うことで更なる広帯域化が可能となる。

近年、制御理論の分野にて一般化 KYP 補題 (Generalized KYP lemma : GKYP lemma) と呼ばれる定理を用いた制御器設計法が提案されており⁽⁵⁾⁽⁶⁾、産業機器への適用例も報

a) Correspondence to: kanematsu@hflab.k.u-tokyo.ac.jp

^{*} 東京大学大学院 新領域創成科学研究科 〒 277-8561 千葉県柏市柏の葉 5-1-5

Department of Frontier Science, The University of Tokyo, 5-1-5, Kashiwanoha, Kashiwa, Chiba, Japan 277-8561

Table 1. Plant Parameters of HDD Benchmark Problem

ω_1 [rad/s]	0	κ_1	1.0	ζ_1	0
ω_2 [rad/s]	$3950 \times 2\pi$	κ_2	-1.0	ζ_2	0.035
ω_3 [rad/s]	$5400 \times 2\pi$	κ_3	0.4	ζ_3	0.015
ω_4 [rad/s]	$6100 \times 2\pi$	κ_4	-1.2	ζ_4	0.015
ω_5 [rad/s]	$7100 \times 2\pi$	κ_5	0.9	ζ_5	0.060
K_p	3.7×10^7				

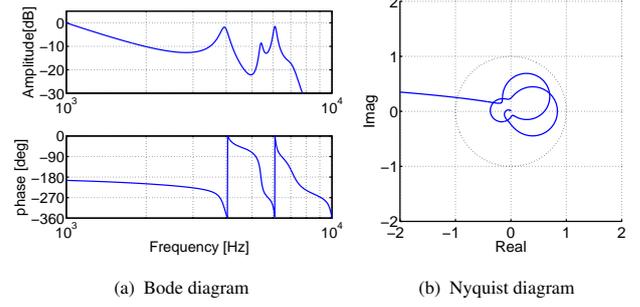


Fig. 1. Frequency characteristics(discretized plant)

告されている⁽⁷⁾。本稿では GKYP 補題を用いた位相安定化補償器とゲイン安定化補償器の同時設計手法を提案する。本稿の新規性は従来、位相安定化補償器とゲイン安定化補償器の同時最適化問題という従来取り組まれてこなかった問題を GKYP 補題を用いて行った点にある。更に、従来の GKYP 補題では低周波数域の開ループ特性に関する仕様をナイキスト線図上のある直線により定まる半平面を用いて与えていた。しかしながら、適切な半平面を決定することは HDD 位置決め制御などの複雑な制御対象においては難しい。そこでまず、極配置手法を用いて低周波数域の開ループ特性の仕様を設計した。次に、各共振モードをゲイン及び位相安定化するための制御器構造を定義し、所望の性能仕様(クロスオーバー周波数、位相余裕、ゲイン余裕など)を表現する周波数領域不等式を定義する。最後に GKYP 補題を用いて各共振モードに対して適切な安定化を行いながら制御帯域を最大化するような制御器パラメータを自動設計する。GKYP 設計法では数値最適化に基づき制御器パラメータを自動設計するため、もし解が見つからなかった場合は設計者が設定した性能仕様を満たすような制御器のパラメータが存在しない。そのため、達成可能な性能限界に近い制御器が得られる。最後に GKYP 設計法にて設計された制御器と文献⁽⁸⁾で示されているゲイン安定化補償器と位相安定化補償器が独立に設計した制御器を比較することで本手法の有効性を示す。

2. 制御対象モデル

HDD のヘッド位置決め機構系においては制御対象モデル $P_c(s)$ は式 (1) のように仮定する⁽⁸⁾。

$$P_c(s) = e^{-sT_d} K_p \sum_{i=1}^N \frac{\kappa_i}{s^2 + 2\zeta_i\omega_i + \omega_{ni}^2} \quad (1)$$

ここで K_p は定数ゲイン、 N はモデリングに用いるモード数、 κ_i は各モードのモード影響定数、 ω_i は各モードの固有振動数、 ζ_i は各モードの減衰係数、 T_d はむだ時間である。なお、 $i = 1$ のモードは剛体モードと呼ばれる。各パラメータを表 1 に示す⁽⁸⁾。この制御対象モデルに対してむだ時間を含む零次ホールドにより離散化したものを制御対象モデルとする。一例として、サンプリング周期 $T_s = 50\mu\text{s}$ 及びむだ時間 $T_d = 15\mu\text{s}$ の時の制御対象モデル $P_d[z]$ のボード線図及びナイキスト線図を図 1 に示す。

3. 制御器設計手法

<3.1> 制御器に求められる制御特性 HDD 位置決め制御においては制御器が次に示す特性を持つ必要がある。

- サーボ系を構成するための積分特性
- 剛体モードを安定化するための位相進み特性
- 各共振モードを安定化するゲインまたは位相安定化特性である⁽⁸⁾。そのため、制御器 $C[z]$ は式 (2) となる。

$$C[z] := C_I[z]C_s[z] \quad (2)$$

ここで、 $C_I[z]$ は積分特性を持つ制御器、 $C_s[z]$ は剛体モード及び各共振モードを安定化するための安定化制御器である。本稿では、サーボ系を構成するための積分特性に対しては適切な周波数領域不等式を与えて GKYP 補題にて制御器設計することが難しかったため、極配置を用いることにより設計を行っている。

<3.2> 極配置を用いた PID 制御器 $C_I[z]$ の設計 サーボ系を構成するための積分特性に対しては連続時間の剛体モードに対しての極配置により制御器設計を行う。本稿では式 (3) で表される PID 制御器を用い、連続時間の剛体モードに対して閉ループ極 ω_p に 4 重極配置する。

$$C_I(s) = \frac{K_I(s + \beta_1)(s + \beta_2)}{s(s + \alpha_1)} \quad (3)$$

ここで K_I, α_1, β_1 及び β_2 は閉ループ極 ω_p により決まる従属変数である。設計された連続時間 PID 制御器 $C_I(s)$ は Tustin 変換にて離散化を行い、離散時間 PID 制御器 $C_I[z]$ としている。

<3.3> 安定化補償器 $C_s[z]$ の定義 式 (4) に示す安定化補償器 $C_s(s)$ を GKYP 補題を用いて同時最適化を行う。

$$C_s(s) := C_m(s)C_h(s) \quad (4)$$

$$C_m(s) := \frac{s + \beta}{s + \alpha} \quad (5)$$

$$C_h(s) := \prod_{k=2}^4 \frac{N_k(s)}{s^2 + 2\zeta_k\omega_{dk} + \omega_{dk}^2}, \quad 0 < \zeta_k < 1 \quad (6)$$

ここで第一項 $C_m(s)$ は剛体モードを位相安定化する補償器、第二項 $C_h(s)$ は各共振モードを安定化する補償器である。ここで $C_h(s)$ は分子多項式 $N_k(s)$ を式 (7)、(8) 及び (9) の

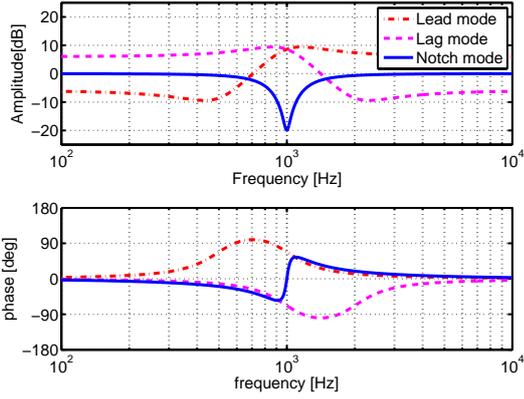


Fig. 2. Bode plots of general stabilization compensators

ように取ること複素極を持つ位相進み補償器、位相遅れ補償器及びノッチフィルタとして動作する 2 次の制御器である⁽⁹⁾。

位相進み補償器として動作する $N_k(s)$

$$N_k(s) = s^2 + 2\zeta_k w_{nk} s + w_{nk}^2, \quad w_{nk} < w_{dk} \quad (7)$$

位相遅れ補償器として動作する $N_k(s)$

$$N_k(s) = s^2 + 2\zeta_k w_{nk} s + w_{nk}^2, \quad w_{nk} > w_{dk} \quad (8)$$

ノッチフィルタとして動作する $N_k(s)$

$$N_k(s) = s^2 + d2\zeta_k w_{dk} s + w_{dk}^2, \quad 0 < d < 1 \quad (9)$$

図 2 に各 $N_k(s)$ に対応するボーデ線図を示す。ここで $N_k(s)$ は GKYP 補題により各共振モードを安定化しつつ帯域を最大化するよう自動的に設計されるため、設計者が予め決める必要はない。一方、GKYP 設計法では分母多項式も最適化変数に選ぶと、凸最適化問題とならず数値的に解を求めることが難しい。そのため分母多項式に関しては自動最適化を行わず、設計者が予め与えておく。本稿では各共振モードに対して位相補償及びゲイン補償を行う必要が有ることを考慮し、 $\zeta_k = 0.3 (k = 2, 3, 4)$ 及び w_{nk} は制御対象の共振モード周波数 ω_k と等しく設計した。また、 α に関しては最終的に達成したい制御帯域以上かつナイキスト周波数以下になる範囲にて選ぶ必要がある。本稿では $\alpha = 8000 \times 2\pi [\text{rad/s}]$ とした。 $C_s(s)$ は、連続時間と離散時間での分母極の位置が変わらないよう、それぞれ個別に対応する周波数 ω_{dk} の値に応じてプリワープ処理付き Tustin 変換にて離散化を行った。ここで離散化後の制御器 $C_s[z]$ は式 (10) となる。

$$C_s[z] = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_7 z^{-7}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_7 z^{-7}} \quad (10)$$

ここで a_i は離散化により決まる既知の分母多項式係数であり、 b_i は GKYP 補題を用いて最適化される未知の探索変数である。

〈3・4〉 安定化補償器 $C_s[z]$ を最適化する LMI の導出 GKYP 補題とは有限周波数に対する周波数領域不等式 (Fre-

quency Domain Inequality : FDI) と等価な線形行列不等式 (Linear Matrix Inequality : LMI) を導く定理である⁽⁵⁾⁽⁶⁾。本稿では式 (10) にて定義された安定化補償器を GKYP 補題を用いてゲイン及び位相により各共振モードを安定化しつつ、所望のゲイン余裕、位相余裕及びゲイン交叉周波数を達成するよう直接設計する。

〈3・4・1〉 第一位相余裕及びゲイン交叉周波数を特徴づける FDI ゲイン交叉周波数 ω_m は開ループ伝達関数が 0dB を横切る周波数である。これはナイキスト線図上で原点を中心とする半径 1 の円との交点である。本稿ではゲイン交叉周波数を制御帯域と定義している。また第一位相余裕 ϕ_m はゲイン交叉周波数での実軸負方向からの回転角度で定義する。ここで式 (11) で現れる FDI は、開ループ伝達関数が所望の第一位相余裕 ϕ_{m1} 及びゲイン交叉周波数 ω_m を満たす条件を表す。

$$|L(j\omega) - G_c| \leq r_m, \quad \underline{\omega}_m \leq \omega \leq \bar{\omega}_m \quad (11)$$

ここで、

$$G_c := -\cos \phi_{m1} - j \sin \phi_{m1},$$

$$\underline{\omega}_m := \omega_m - \Delta\omega_1, \quad \bar{\omega}_m := \omega_m + \Delta\omega_1$$

であり、 r_m は円の半径を表す正の定数である。図 3(a) にナイキスト線図上にて FDI により表現される領域を示す。

〈3・4・2〉 感度関数のピーク低減を特徴づける FDI ナイキスト平面上における点 $[-1, 0]$ から一巡伝達関数 $L(j\omega)$ までの距離を $R(j\omega)$ とすると、 $R(j\omega)$ と感度感数の間には次の関係がある⁽⁴⁾。

$$|S(j\omega)| = \frac{1}{|R(j\omega)|} \quad (12)$$

そのため、式 (13) で表される FDI を考えることにより感度関数のピークを低減する。

$$\text{Im}[L(j\omega)] \leq (\tan \theta) \text{Re}[L(j\omega)] + \tan \theta \cdot \cos \phi_{m1} - \sin \phi_{m1},$$

$$\omega_m \leq \omega \leq \omega_m + \Delta\omega_2 \quad (13)$$

この FDI は、点 G_c を通り、傾き θ の直線の下側領域を表す (図 3(b))。

〈3・4・3〉 第二位相余裕を特徴づける FDI 第二位相余裕 ϕ_{m2} は 2 回目のゲイン交叉周波数にて定義されているため、次の FDI を考えることにより第二位相余裕を確保する。

$$-\cos \phi_{m2} \leq \text{Re}[L(j\omega)], \quad \omega_3 \leq \omega \quad (14)$$

この FDI を図示すると図 3(c) となる。主共振モード ($i = 2$ のモード) に対しての安定性はこの第二位相余裕にて評価する。

〈3・4・4〉 各共振モードに対して安定化を特徴づける FDI 節〈3・4・2〉で述べたように一巡伝達特性がナイキスト線図

上にて点 $[-1, 0]$ から遠ざかるほど各共振モードに対して安定である。そこで式 (15) で表される FDI を各共振モードに対しての安定化条件とする。

$$r_s \leq \text{Re}[L(j\omega)], \omega_4 \leq \omega \quad (15)$$

この FDI を図示すると図 3(d) となる。主共振モード以外の共振モードに対しての安定性はこの FDI にて評価する。

〈3・4・5〉 FDI から LMI への変換 式 (11)(13)(14) 及び (15) にて表される FDI は GKYP 補題を用いることで等価な LMI に変換出来る。なお、GKYP 設計法では既知のシステム $G_1[z]$ と状態表現した際の B, D 行列に未知変数を含むシステム $G_2[z]$ が直列に接続されている際には可解な LMI となる⁽⁶⁾。そのため、今回は $G_1[z] = C_1[z]P_d[z]$ 、 $G_2[z] = C_s[z]$ として GKYP 補題を適用した。そのため LMI を解くことにより開ループ伝達関数 $L(j\omega)$ が各 FDI を満たすよう安定化補償器 (10) のパラメータ係数 b_i を求めることが出来る。なお設計者が FDI を設定することで FDI から LMI への変換及び求解は自動化出来るため、設計者が煩雑な行列操作を行う必要はない⁽¹⁰⁾。GKYP 補題を用いた LMI の導出例は本稿の付録に示す。

4. 安定化補償器の設計

本節では文献⁽⁸⁾に示されている HDD ベンチマーク問題にて GKYP 補題を用いた位相安定化補償器及びゲイン安定化補償器を設計する。プログラムは Matlab 上で実行し、LMI の記述には Yalmip⁽¹¹⁾ を、LMI ソルバには Mosek⁽¹²⁾ を用いた。

〈4・1〉 制御器の設計結果 本稿では制御器の性能仕様は下記の条件を用いて与え、以下の仕様を満たしつつ制御帯域を最大化するよう設計する。

- ゲイン余裕 5dB 以上
- 第一位相余裕 30 度以上
- 第二位相余裕 40 度以上
- 感度関数のピーク 8dB 以下
- 共振モードの安定化条件 (式 (15)) を満たす

なお低域の性能仕様として節〈3・2〉の閉ループ極 ω_p を $400 \times 2\pi[\text{rad/s}]$ とした。なお、以下の解析にて位相遅れの影響が異なる 2 つの場合を考え、その時のサンプリング周期として文献⁽⁴⁾で示されているサンプリング周期 $T_s = 50[\mu\text{s}]$ と、より早いサンプリング周期 $T_s = 10[\mu\text{s}]$ の例を扱う。

〈4・1・1〉 サンプリング周期 $T_s = 50[\mu\text{s}]$ の場合 まず FDI に必要なパラメータを決める。 ω_m 及び θ 以外のパラメータは微調整の必要がないため、 $\omega_m = 1000 \times 2\pi[\text{rad/s}]$ 、 $\theta = 50[\text{deg}]$ を用いて他のパラメータは予め設定し、以下では固定の値を用いた。式 (11)-(15) に用いた FDI パラメータを表 2 に示す。ここで式 (11)-(15) で表される FDI に対応する LMI を連立させて制御器を設計する。表 2 の値を用いることで、制御器は第一位余裕、第二位位相余裕の性能仕様を満たしつつ、全ての共振モードが安定化される。そのためその他の性能仕様であるゲイン余裕及び感度感数

Table 2. Design Parameters of LMI Conditions

FDI (11)	
1st phase margin $\phi_{m1}[\text{deg}]$	30
crossover frequency $\omega_m[\text{rad/s}]$	$1200 \times 2\pi$
r_m	0.001
$\Delta\omega_1[\text{rad/s}]$	$0 \times 2\pi$
FDI (13)	
$\theta_i[\text{deg}]$	55
$\Delta\omega_2[\text{rad/s}]$	$700 \times 2\pi$
FDI (14)	
2nd phase margin $\phi_{m2}[\text{deg}]$	40
$\omega_3[\text{rad/s}]$	$3000 \times 2\pi$
FDI (15)	
r_s	-0.3333
$\omega_4[\text{rad/s}]$	$4000 \times 2\pi$

のピークが性能仕様を満たしつつ制御帯域が最大となるよう ω_m 及び θ の調整を行った結果、 $\omega_m = 1200 \times 2\pi[\text{rad/s}]$ 、 $\theta_i = 55[\text{deg}]$ の時に性能仕様を満たしつつ帯域が最大となった。文献⁽⁸⁾(p.111 の設計例 3) に示されている $i = 3$ の共振モードに対して予めノッチフィルタを設計し、その後に帯域を最大化するよう位相進み遅れ補償器を調整する手法を従来法とした比較結果を図 4 に示す。図 4 から従来法とほぼ同等な制御性能を持つ制御器が得られている。また図 4(c) から従来法より低周波数及び制御帯域にて高ゲイン化出来ている。図 4(b) には設計された開ループ伝達関数と FDI が示す領域を可視化しており、一巡伝達関数が FDI の制約を満たすよう制御器が自動設計されていることが確認出来る。なお、FDI の仕様を変更することで容易に制御器の再調整が可能である。一巡伝達特性を表している図 4(d) から $i = 2, 3$ 及び 4 の共振モードに対して安定化制御器の構造を持たせた状態で GKYP 補題にて制御帯域を最大化を行うと、モード影響定数が負のモードに対してはノッチフィルタを用いず、モード影響定数が正のモードに対してはノッチフィルタを用いた設計法が最も広帯域化できるという結果を得た。これは図 1 からサンプリング周波数 $T_s = 50\mu\text{s}$ にて生じるむだ時間によりモード影響定数が負のモードが既に位相安定化されているためであり、この知見は先行研究で得られている結論と一致する⁽⁸⁾。更に従来法との比較結果により、感度関数の最大値を低減しつつ従来よりも広帯域な安定化制御器が得られた。性能仕様の比較結果を表 3 に示す。

〈4・1・2〉 サンプリング周期 $T_s = 10[\mu\text{s}]$ の場合 次にサンプリング周期を $T_s = 10[\mu\text{s}]$ に変更した場合に同様の条件で帯域最大化を行った設計例を図 6 に示す。この場合、図 5 に示すように零次ホールドによる位相遅れが小さいためモード影響定数が負の共振モードが十分に位相安定化されない。そのため、それぞれの共振モードに対して適切に安定化を行う必要がある。この時、従来法 1 として $i = 3, 4$

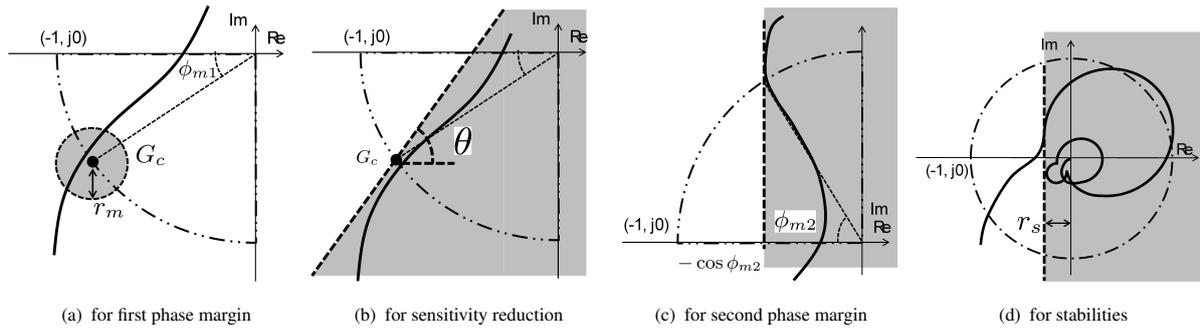


Fig. 3. Graphical expression of FDI conditions in Nyquist diagram

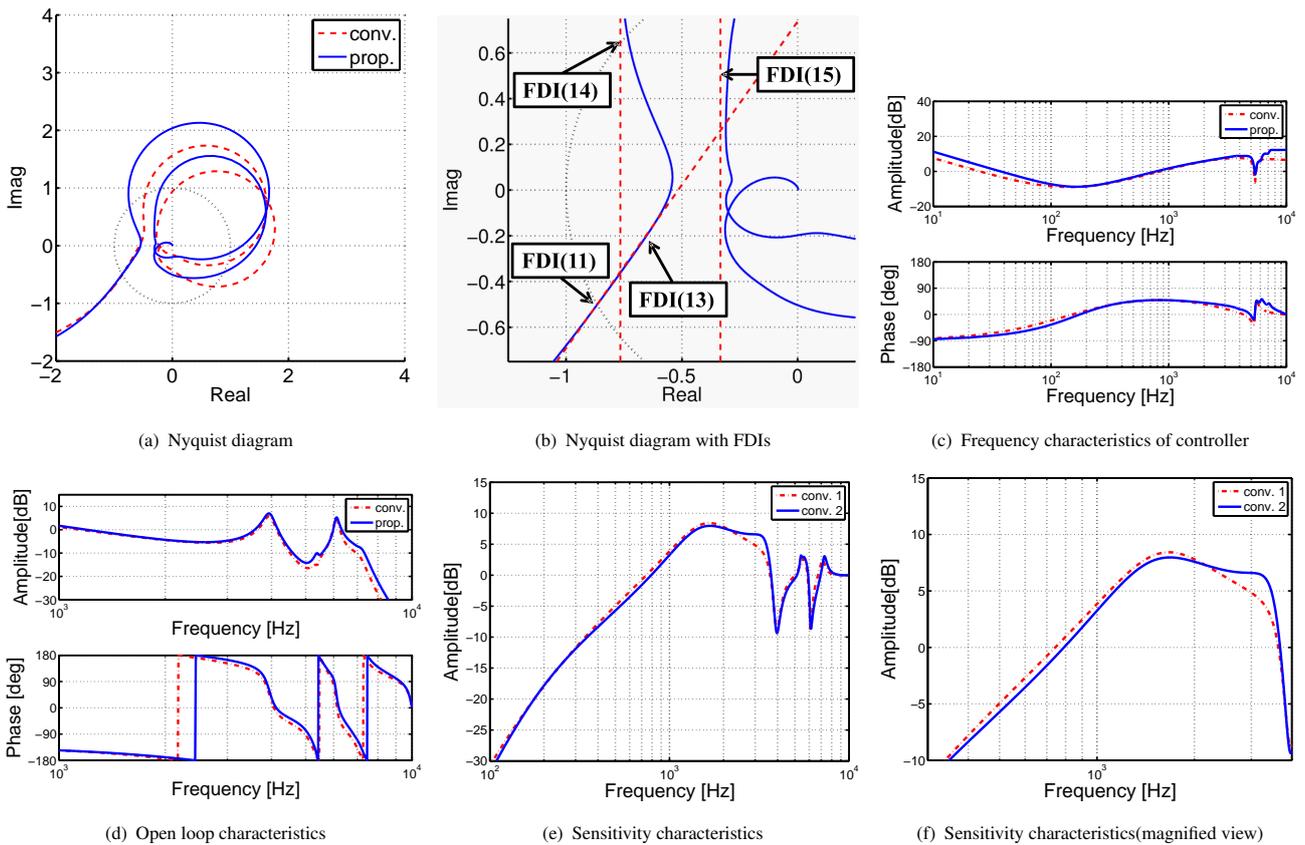


Fig. 4. Simulation result 1 (sampling period $T_s = 50[\mu s]$)

Table 3. Comparison results of design 1

	conv.	prop.
crossover frequency	1150Hz	1200Hz
gain margin	4.94dB	5.23dB
1st phase margin	30.4deg	30.0deg
2nd phase margin	62.0deg	42.6deg
$ S(j\omega) _\infty$	8.43dB	7.97dB
$ T(j\omega) _\infty$	6.01dB	5.90dB

の共振モードに対して予めノッチフィルタを設計し、その後、 $C_m[z]$ を GKYP 補題にて設計仕様を満たすよう最適化したものとする。従来法 2 は $i = 2, 3, 4$ の共振モードに対し

て予めノッチフィルタを設計し、同様に $C_m[z]$ を GKYP 補題にて最適化したものである。予め設計したノッチフィルタは文献⁽⁸⁾と同様のものを用いた。なお、モード影響定数 $i = 3$ の共振モードに対してのみノッチフィルタを設計し、帯域最大化した際には、 $i = 4$ の共振モードを式 (15) を満たすよう安定化出来ず、帯域が十分上がらなかったことから記載していない。提案法である GKYP 補題を用いて、同様に ω_m 及び θ を調整した結果、 $\omega_m = 1390[\text{rad/s}]$ 、 $\theta = 53[\text{deg}]$ の時に帯域が最大となった。制御器の特性及び最終的に達成された開ループ伝達関数に対する考察のために、開ループ伝達関数のナイキスト線図の拡大図及び制御器の周波数特性の拡大図を図 7 に示す。図 7(a) ではナイキスト線図上で各共振モード周波数 ω_3, ω_4 及び ω_5 がどの点に対応する

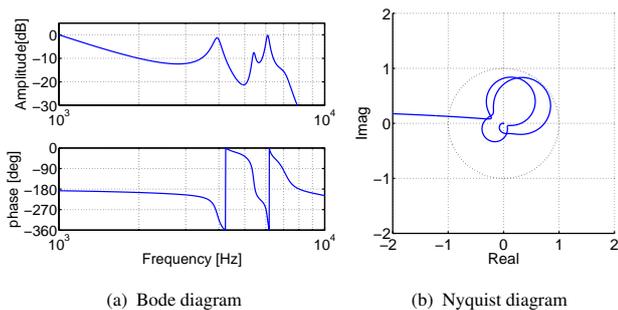


Fig. 5. Frequency characteristics of plant with $T_s = 10[\mu s]$

かを明確化するために記号 \circ , \diamond 及び \star を用いて表記している。従来法 1 では帯域を上げていくと、第二位相余裕が確保できず、1300Hz までしか広帯域化出来なかった。そのため、主共振モードの安定化が帯域の制限となっていることが分かる。一方、従来法 2 では帯域を上げていくと、感度感数のピークが性能仕様を満たすことが出来ず、1230Hz までしか広帯域化出来なかった。これは主共振モードに対するノッチフィルタの位相遅れが大きいためと考えられる。一方、提案法では制御帯域での位相遅れが問題とならない程度に主共振モードに対して弱いノッチフィルタが働いている。このことは図 7(b) において $i = 2$ の共振モード周波数での従来法 1 及び提案法のゲインの差として見る事が出来る。その結果として制御帯域での位相遅れの影響を少なくしながら、第二位相余裕を確保出来ている。また、 $i = 3, 4$ の共振モード周波数においても図 7(a) から、従来法 1 及び 2 よりもハイゲインであるにも関わらず、不安定点 $[-1, 0j]$ から離れる方向に位相特性が自動調整されている。そのため式 (15) で表される FDI を満たしており、十分に安定化出来ている。つまりサンプリング周波数やむだ時間による位相遅れが少ない場合、負の共振モードに対して必ずしも強いノッチフィルタは必要とならない。図 7(a) から、提案法では $i = 5$ の共振モード周波数においても従来法 1 及び 2 よりハイゲイン化が行われている。このように同時最適化を行うことで、それぞれの共振モードに対応する安定化制御器の干渉を考慮してゲイン特性及び位相特性を自動的に最適化出来る。最終的に達成された性能仕様の比較結果を表 4 に示す。表 4 から性能仕様を満たしつつ広帯域化出来ていることが確認出来る。

〈4・2〉 GKYP 補題を用いた設計法の利点 GKYP 補題を用いた設計法は他の設計法と比較して次の利点がある。

● 達成可能な性能限界の明確化

GKYP 補題を用いた設計法では設定した FDI を満たすように制御器パラメータを設計するため、解が見つからなかった場合は、その制御器の構造でその性能仕様を満たす制御器が存在しないことが保証できる。そのため理論的に実現不可能な性能仕様を目標に制御器の調整を行っていた場合でもどの性能仕様がボトルネックになっているかが把握しやすい。

Table 4. Comparison results of design 2

	conv. 1	conv. 2	prop.
crossover frequency	1300Hz	1230Hz	1390Hz
gain margin	5.55dB	5.37dB	5.01dB
1st phase margin	30.4deg	31.5deg	30.1deg
2nd phase margin	41.5deg	—	44.8deg
$ S(j\omega) _\infty$	7.59dB	7.94dB	7.67dB
$ T(j\omega) _\infty$	5.72dB	5.57dB	5.80dB

● 多目的な性能仕様に対する調整しやすさ

GKYP 補題を用いた設計法では複数の FDI を満たす制御器を数値的に探索するため、他の手法と比較して複数の性能仕様がトレードオフの関係にある際でも制御器を設計しやすいという利点がある。

5. 結論と今後の課題

本稿では HDD ベンチマーク問題にて GKYP 補題を用いた安定化補償器の同時設計を行った。まず GKYP 補題では FDI 制約を課すことが難しかった低域での開ループ特性を極配置を用いることに改善した。更に GKYP 補題を用いて制御帯域が最大となるよう安定化補償器を同時に設計した結果、モード影響定数が正及び負の共振モードに対して制御帯域が最大となるよう適切に安定化制御器が自動的に設計された。以前よりモード影響定数が正及び負の共振モードに対してゲイン安定化及び位相安定化を行うことで制御帯域の広帯域化が可能であると精密位置決め分野では知られていたが、GKYP 補題という制御理論を用いることで同様の結論を得た。またサンプリング周期やむだ時間の影響での位相遅れが小さい場合にはそれぞれの共振モードに対する帯域最大化のために最適な安定化手法が違うことを明らかにした。

謝 辞

本研究は日本学術振興会 (JSPS) 科研費特別研究員奨励費 JP15J08374 の助成を受けたものである。研究支援に感謝致します。

文 献

- (1) Y. Maeda and M. Iwasaki, "Circle condition-based feedback controller design for fast and precise positioning," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 61, pp. 1113–1122, 2014.
- (2) T. Atsumi, "Emerging technology for head-positioning system in hdds," *IEEJ Journal of Industry Applications*, vol. 5, no. 2, pp. 117–122, 2016.
- (3) T. Atsumi and W. C. Messner, "Optimization of head-positioning control in a hard disk drive using the RBoDe plot," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 59, no. 1, pp. 521–529, 2012.
- (4) T. Atsumi, T. Arisaka, T. Shimizu, and T. Yamaguchi, "Vibration servo control design for mechanical resonant modes of a hard-disk-drive actuator," *JSME international journal. Series C, Mechanical systems, machine elements and manufacturing*, vol. 46, pp. 819–827, 2003.
- (5) T. Iwasaki and S. Hara, "Generalized KYP lemma: Unified frequency domain inequalities with design applications," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 50, no. 1, pp. 41–59, 2005.
- (6) S. Hara, T. Iwasaki, and D. Shiokata, "Robust pid control using generalized

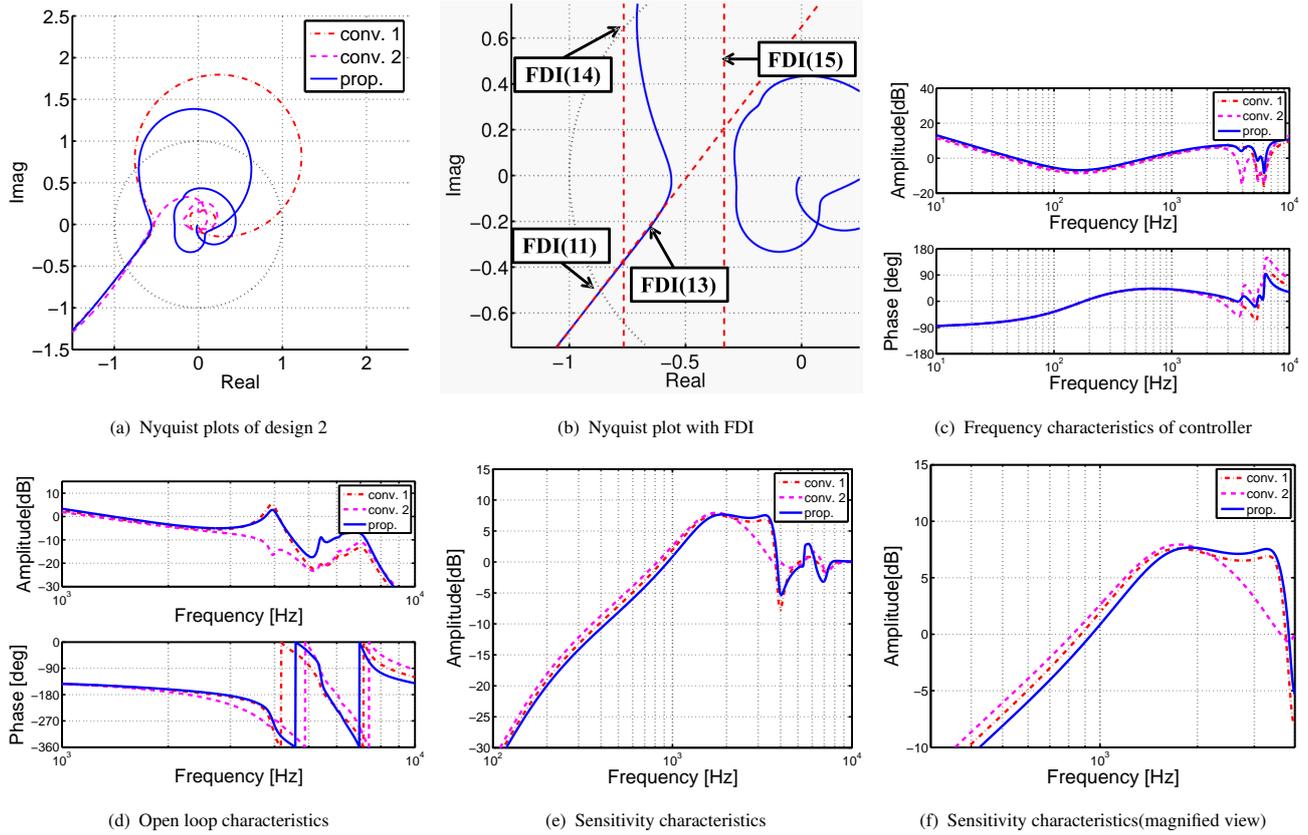


Fig. 6. Simulation result of design 2 (sampling period $T_s = 10[\mu\text{s}]$)

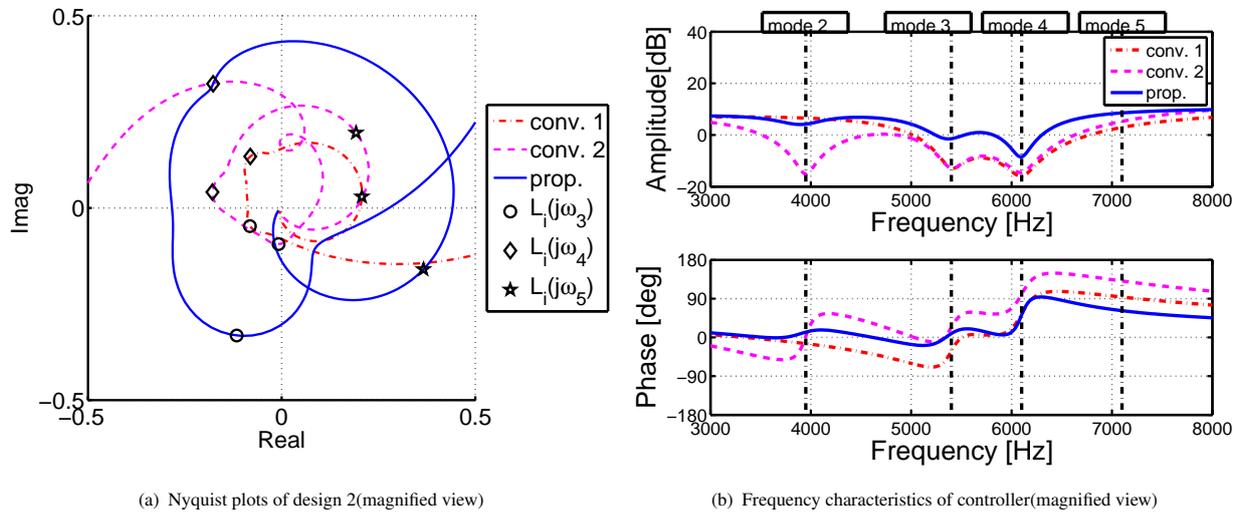


Fig. 7. Frequency characteristic analysis of design 2

kyp synthesis: direct open-loop shaping in multiple frequency ranges," *IEEE Control Systems*, vol. 26, pp. 80–91, 2006.

- (7) T. Zamma, M. Morimoto, and K. Yubai, "Suppression of harmonic current for IPMSM using generalized repetitive control," *IEEJ Journal of Industry Applications*, vol. 3, no. 3, pp. 214–220, 2014.
- (8) 山口高司, 平田光男, 藤本博志, "ナノスケールサーボ制御-高速高精度に位置を決める技術-, 東京電機大学出版局, 2007.
- (9) W. C. Messner, M. D. Bedillion, L. Xia, and D. C. Karns, "Lead and lag compensators with complex poles and zeros design formulas for modeling and loop shaping," *IEEE Control Systems*, vol. 27, pp. 44–54, 2007.
- (10) D. Shiokata, S. Hara, and T. Iwasaki, "From nyquist/bode to gkyp de-

sign: design algorithms with cacs tools," in *SICE 2004 Annual Conference*, vol. 2, pp. 1780–1785 vol. 2, 2004.

- (11) J. Lofberg, "Yalmip : a toolbox for modeling and optimization in matlab," in *Computer Aided Control Systems Design, 2004 IEEE International Symposium on*, pp. 284–289, 2004.
- (12) M. ApS, *The MOSEK optimization toolbox for MATLAB manual. Version 7.1 (Revision 41)*, 2015.

付 録

1. GKYP 補題による FDI と等価な LMI の導出方法

本節では FDI から LMI の導出方法を FDI(11) を例に述べる。

GKYP 補題では FDI は FDI から導かれる行列 Φ, Ψ, Π にて特徴づけられ、例えば式 (11) で表される FDI に対しては、

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (\text{付 1})$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} 0 & e^{j\omega_m T_s} \\ e^{-j\omega_m T_s} & -2\cos(\Delta\omega_1) \end{bmatrix}, \quad (\text{付 2})$$

$$\Pi = \begin{bmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} \\ \Pi_{12}^* & \Pi_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -G_c^* \\ G_c & |G_c|^2 - r_m^2 \end{bmatrix} \quad (\text{付 3})$$

となる⁽⁶⁾。この行列 Φ, Ψ, Π は文献⁽⁶⁾などに表として示されているため、設計者が指定したい FDI に対応する行列を参照すればよい。一巡伝達関数の状態空間表現を A_L, B_L, C_L, D_L とすると、制御器の分子多項式の係数 b_i は B_L, D_L のみに現れる。ここで GKYP 補題により、式 (付 4) 及び (付 5) を満たす Hermitian 行列 P, Q が存在する条件と、式 (11) で表される FDI が成立する条件が等価である。

$$Q \geq 0 \quad (\text{付 4})$$

$$\begin{bmatrix} W(P, Q) + V & \begin{bmatrix} B_L \\ D_L \end{bmatrix} \Pi_{11} \\ \Pi_{11} \begin{bmatrix} B_L \\ D_L \end{bmatrix}^* & -\Pi_{11} \end{bmatrix} \leq 0 \quad (\text{付 5})$$

ただし、

$$W(P, Q) := \begin{bmatrix} A_L & I \\ C_L & 0 \end{bmatrix} (\Phi^T \otimes P + \Psi^T \otimes Q) \begin{bmatrix} A_L & I \\ C_L & 0 \end{bmatrix}^*,$$

$$V := \begin{bmatrix} 0 & B_L \Pi_{12} \\ [B_L \Pi_{12}]^* & \text{He}[D_L \Pi_{12}] + \Pi_{22} \end{bmatrix}.$$

そのため式 (付 4) 及び (付 5) を満たす Hermitian 行列 P, Q 及び制御器の分子多項式 b_i を含む行列 B_L, D_L を数値的に計算すればよい。

兼松 正人 (学生員) 1988 年 5 月 29 日生。2012 年 3 月東



京大学工学部電子情報工学科卒業。2014 年 3 月東京大学新領域創成科学研究科先端エネルギー工学卒業。2014 年 3 月東京大学大学院工学系研究科電気系工学 (博士課程) に入学。現在、主としてモータの電磁力モデルに基づく音振動抑制制御理論、先進的制御理論を応用した精密位置決めのための制御理論の研究に従事。2015 年 4 月より

日本学術振興会 (JSPS) 特別研究員 (DC2)。

藤本 博志 (上級会員) 1974 年 2 月 3 日生。2001 年東京大



学大学院工学系研究科電気工学専攻博士課程修了。博士 (工学)。同年長岡技術科学大学工学部電気系助手。2002 年~2003 年、米国 Purdue 大学工学部機械工学科客員研究員。2004 年横浜国立大学大学院工学研究院講師。2005 年同助教授、2007 年同准教授。2010 年東京大学大学院准教授。制御工学、モーションコントロール、マルチレート制御、ナノスケールサーボ、電気自動車の運動制御、モータとインバータの高性能制御、ビジュアルサーボに関する研究に従事。2001 年および 2013 年 IEEE Trans. IE 最優秀論文賞、2010 年 Isao Takahashi Power Electronics Award、2010 年計測自動制御学会著述賞、2016 年永守賞大賞などを受賞。IEEE Senior Member、計測自動制御学会、日本ロボット学会、自動車技術会、各会員。